Übungsklausur - Kursstufe 1 GK - Analysis
Lösungen

Marvin Gassmann

20. November 2023

Aufgabe 1:

Schwierigkeitsgrad: ★★★

a)

$f'(x) = 3 \cdot cos(3x)$
$f''(x) = -9 \cdot sin(3x)$
$f'''(x) = -27 \cdot cos(3x)$
$f^4(x) = 81 \cdot sin(3x)$
$f^5(x) = 243 \cdot cos(3x)$

b)

$f^{27}(x) = -3^{27} \cdot cos(3x)$

c)

Man sollte erkennen, dass ganz vorne immer Potenzen von 3 stehen. 3x bleibt im inneren immer stehen und die eigentliche Funktion alterniert zwischen sin, cos, -sin und -cos. Jetzt muss man das nur in Verbindung mit der Ordnung der jeweiligen Ableitung bringen (also die wie vielte Ableitung es ist) und hat die Lösung.

$$f^n(x) = \begin{cases} 3^n \cdot sin(3x) & \text{für alle} \quad n = 0, 4, 8, 12, 16 \quad \text{usw.} \\ 3^n \cdot cos(3x) & \text{für alle} \quad n = 1, 5, 9, 13 \quad \text{usw.} \\ -3^n \cdot sin(3x) & \text{für alle} \quad n = 2, 6, 10, 14 \quad \text{usw.} \\ -3^n \cdot cos(3x) & \text{für alle} \quad n = 3, 7, 11, 15 \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Möglich wäre aber genauso: $f^n(x) = 3^n \cdot sin(n \cdot \frac{\pi}{2} + 3x)$

Aufgabe 2:

Schwierigkeitsgrad: ★★☆

a)

$x = \frac{\pi}{2}$

b)

$x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$

c)

$x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$

Aufgabe 3:
Schwierigkeitsgrad: ★★☆

$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$
$f''(x) = -x + 2$
$f'''(x) = -1$

Zuerst bestimmt man den Wendepunkt, indem man die zweite Ableitung null setzt. Das liefert $x = 2$ als mögliche Wendestelle. Das müsste man jetzt noch mit der dritten Ableitung prüfen, aber da diese immer ungleich null ist, ist die hinreichende Bedingung zwangsläufig erfüllt. Als nächstes braucht man für die Tangente den y-Wert und die Steigung an der Stelle $x = 2$.
$f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = -2 + 4 - 1 = 2 - 1 = 1$
$f(2) = -\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2^2 - 2 = \frac{2}{3}$

Einsetzen in die allgemeine Tangentengleichung:
$t : y = 1 \cdot (x - 2) + \frac{2}{3} = x - 2 + \frac{2}{3} = x - \frac{4}{3}$
Was der gegebenen Tangentengleichung entspricht.

Aufgabe 4:
Schwierigkeitsgrad: ★☆☆ - ★★☆

Bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f'(x) = x \cdot cos(4x^2)$
b) $g'(a) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a+3}}$
c) $h'(x) = \frac{2x-3}{2 \cdot \sqrt{x}} + 2 \cdot \sqrt{x} = \frac{6x-3}{2 \cdot \sqrt{x}}$
d) $i'(z) = -\frac{2 \cdot sin(z)}{z} - \frac{2 \cdot cos(z)}{z^2} = -\frac{2 \cdot (z \cdot sin(z) + cos(z))}{z^2}$
e) $j'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{x}}$
f) $k'(t) = -\frac{cos(t)}{sin^2(t)}$

Aufgabe 5:
Schwierigkeitsgrad: ★★☆

Achtung, Falle! Die einzige Extremstelle von f ist $x = 1$! $x = -3$ ist zwar eine Nullstelle von f', allerdings hat f' dort keinen Vorzeichenwechsel. Aus diesem Grund liegt dort keine Extremstelle vor.

Aufgabe 6:
Schwierigkeitsgrad: ★★☆

Hier ist der Monotoniesatz anwendbar. In $I = (0; \infty)$ ist $f'' > 0$ d.h. f' ist in diesem Intervall streng monoton steigend. In $I = (-\infty; 0)$ ist $f'' < 0$ d.h. f' ist in diesem Intervall streng monoton fallend. Die Aussage ist somit falsch. Man muss hier darauf achten, dass man die Null wirklich aus den Intervallen rauslässt. Nimmt man sie mit in die Intervalle, würde man keine strenge Monotonie begründen und die Begründung wäre unzureichend.

Aufgabe 7:
Schwierigkeitsgrad: ★☆☆

a)

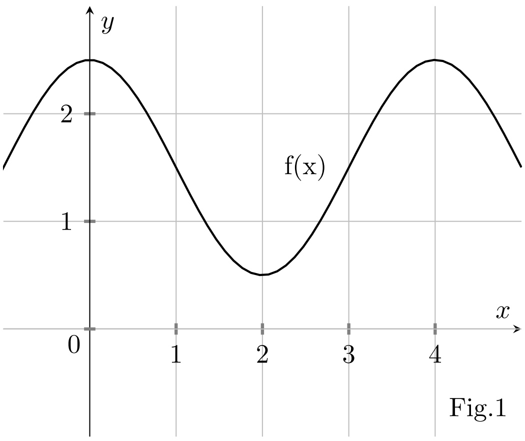

Fig.1

Der rechnerische Ansatz mittels erster und zweiter Ableitung liefert für den Tiefpunkt des Graphen $P(2|0,5)$. Alternativ kann man den Punkt aber auch einfach am Graphen ablesen.

b)
Da der Ansatz in der Aufgabenstellung nicht weiter festgelegt ist, sind hier wieder mehrere Lösungen möglich. Über die erste und zweite Ableitung kann man den Hochpunkt $H(0|2,5)$ und den Tiefpunkt $T(2|0.5)$ finden. Alternativ kann man das auch einfach am Graphen wieder ablesen. Oder man überlegt sich Folgendes: Der Kosinus alterniert ja normalerweise zwischen -1 und 1 hin und her. Das heißt der Höhenunterschied beträgt 2 Längeneinheiten. In dieser Aufgabe geht es zwar um eine leicht veränderte Kosinus-Funktion, jedoch wurde sie weder gestreckt noch gestaucht. Daher kann man den Höhenunterschied von 2 Kilometern direkt als Lösung angeben. Wichtig ist hier auf jeden Fall die Einheit aus der Aufgabe zu verwenden!

c)
Und auch hier kann man seiner Kreativität freien Lauf lassen. Über die zweite und dritte Ableitung könnte man den Wendepunkt $W(1|1,5)$ berechnen. Wendepunkte sind ja bekanntlich Extremstellen der ersten Ableitung. Das bedeutet, dass dort die Steigung am größten ist. Am Graphen ist erkennbar, dass der Graph dort offensichtlich abfällt. Daher kann man sagen: Bis zur Stelle x=1 Kilometer (wichtig: Einheit!!!!) fällt der Graph immer steiler und hinter dem Wendepunkt wird er immer flacher. Wenn man den Ansatz über die Ableitungen nicht wählen will, kann man den Wendepunkt aber auch am Graphen ablesen, denn dort ändert sich das Krümmungsverhalten.